

確率と仮説検定の演習 6問

条件を読み、式と理由を手で書くための無料教材です。まず問題編に取り組みます。

印刷はA4・100%を推奨。問題だけなら1～4ページを指定してください。全8ページを両面印刷しても、問題編と解説編が同じ用紙の表裏に混じらない構成です。

数値と場面は編集部独自作成です。大学の過去問・出題予想・合格基準ではありません。志望先の公式資料で、確率・統計が試験範囲に含まれるか確認してください。

問題1・2の設定

架空の部品1,000個の状態が、すべて次の表のとおり確定しています。未知の性能を標本から推定する問題ではありません。各部品が同じ確率で選ばれるように1個を選びます。Dは「故障している」、Fは「警告が出た」という事象です。

実際の状態	警告あり F	警告なし	合計
故障あり D	36	4	40
故障なし	48	912	960
合計	84	916	1,000

個数の単位は個。問題1・2では全1,000個から選びます。

問題1 条件の向きを区別する

$P(D \mid F)$ 、 $P(F \mid D)$ 、 $P(D \cap F)$ をそれぞれ求めてください。各式の分母を選んだ理由も一文で説明してください。記号 $\mid$ の右側は、既に分かっている条件です。

$P(D \mid F)$ の式・答え・分母の理由

$P(F \mid D)$ の式・答え・分母の理由

$P(D \cap F)$ の式・答え・分母の理由



独立性と戻さない抽出

問題1と同じ部品の表を使います。確率の等式と、選び方の条件を示してください。

問題2 独立かどうかを判定する

DとFは独立ですか。P(D)、P(F)、 $P(D \cap F)$ を使い、独立の定義に照らして判断してください。装置が機械的に動くことは、確率上の独立を意味するのでしょうか。

それぞれの確率と、独立の条件の照合

判断とその理由

問題3 戻す場合と戻さない場合を比べる

警告が出た84個だけを取り出し、各回、選べる部品から等しい確率で1個ずつ計2回選びます。2個とも故障している確率を、①1回目を戻さない場合、②毎回元に戻し、独立に選び直す場合、のそれぞれで求めてください。故障の有無は選んだ後に確認し、故障品だけを選ぶ操作はしません。

① 戻さない場合 1回目の確率・2回目の条件付き確率・答え

② 戻して独立に選び直す場合 式・答え・①と異なる理由

仮説検定の条件と計算

問題4～6は、標準誤差・両側p値・検定結果の意味を練習する3つの架空のケースです。

問題4～6に共通する条件

各ケースは、正規母集団から独立に抽出した標本です。母平均 μ は未知、母標準偏差 $\sigma=10$ は既知とします。帰無仮説 $H_0: \mu=100$ 、対立仮説 $H_1: \mu \neq 100$ の両側Z検定を行います。有意水準 $\alpha=0.05$ と標本数 n は、データを見る前に定めています。

A・B・Cは別々の架空の場面です。同じ調査に標本を追加しながら繰り返し検定する設定ではありません。測定値の単位は3ケースで同じです。

ケース	標本数 n	標本平均 $\bar{x}$
A	25	102
B	100	102
C	10,000	100.2

計算に使う式と確率

$$\text{標準誤差} = \sigma / \sqrt{n} \quad z = (\bar{x} - 100) / (\sigma / \sqrt{n})$$

H_0 のもとで Z は標準正規分布に従う

$$\text{両側p値} = P(|Z| \geq |z|) = 2P(Z \geq |z|)$$

$$P(Z \geq 1) \approx 0.158655 \quad P(Z \geq 2) \approx 0.022750$$

p値は小数第4位まで示してください。

問題4 Aの計算と「棄却できない」の意味

Aの標準誤差、 z 、両側p値を求め、5%水準で H_0 を棄却するか判断してください。「母平均が100だと証明された」「 H_0 が正しい確率はp値である」は適切か、理由も書いてください。

標準誤差 → z → 両側p値 → 判断 → その判断で言えないこと

標本数と差の大きさを比べる

3ページの条件と式を使います。計算結果と、その解釈を分けて書いてください。

問題5 同じ標本平均でも判断が変わるか

Bについて、標準誤差、 z 、両側 p 値、5%水準での判断を求め、Aと比べてください。標本平均と基準値100との差は同じなのに、 z と p 値が変わる理由を、標本数と標準誤差を使って説明してください。

Bの計算と5%水準での判断

Aとの比較 標本数・標準誤差・ z ・ p 値の関係

問題6 同じ p 値なら差の大きさも同じか

Cについて同じ計算を行い、Bと比べてください。 p 値が同じなら、観測された差の大きさや実用上の重要性も同じと言えるでしょうか。表から判断できることと、追加で必要な基準を分けて答えてください。

Cの計算と5%水準での判断

Bとの比較 観測された差・重要性について言えることと限界

条件付き確率と独立性の解説

問題1・2の解答例です。分母にした集団を、日本語でも説明できるか確かめます。

問題1 同じ36個でも分母が違う

条件付き確率は $P(B) \neq 0$ のとき、 $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$ で定義します。この問題は個々の部品が等確率なので、条件Bを満たす個数を分母、その中でAも満たす個数を分子にできます。

求める確率	式と答え	分母が示す集団
$P(D F)$	$36/84 = 3/7$	警告が出た84個
$P(F D)$	$36/40 = 9/10$	故障している40個
$P(D \cap F)$	$36/1,000 = 9/250$	全1,000個

それぞれ約42.86%、90%、3.6%です。「故障品の90%に警告が出る」から「警告品の90%が故障」とは言えません。条件を逆にした式や、条件なしの同時確率と区別してください。

問題2 DとFは独立ではない

$$P(D) = 40/1,000 = 1/25 \quad P(F) = 84/1,000 = 21/250$$

$$P(D)P(F) = 21/6,250$$

$$P(D \cap F) = 9/250 = 225/6,250$$

この二つは一致せず、独立の条件 $P(D \cap F) = P(D)P(F)$ を満たしません。 $P(D | F) = 3/7$ が $P(D) = 1/25$ と異なることでも確認できます。装置が機械的に動くという印象から、確率上の独立を仮定することはできません。

ここでは、すべて既知の表から計算しています。未知の母集団について独立性の統計的検定をしているわけではありません。

抽出の条件とベイズの検算

問題3の解答例と、問題1を別の式で確かめる方法です。分数のまま計算を進めます。

問題3① 戻さない場合

警告が出た84個のうち故障品は36個です。1回目が故障品だったという条件の下では、残りは83個、そのうち故障品は35個になります。

$$(36/84) \times (35/83) = 15/83 \approx 18.07\%$$

2回目も36/84として掛けると、戻さない条件を反映できません。残る全体数と故障品数の両方が1減ることを確認します。

問題3② 戻して独立に選び直す場合

$$(36/84) \times (36/84) = 9/49 \approx 18.37\%$$

毎回元に戻すため内訳は36個／84個に戻り、さらに独立に選び直すという設定です。「戻す」だけで実際の選び方まで独立と決めつけず、問題文が独立性も指定していることを確認します。

問題1をベイズの定理で検算する

故障なしをDの補集合とします。故障なし960個中48個に警告が出るので、 $P(F | \text{故障なし}) = 1/20$ 。故障品は全体の1/25、故障なしは24/25です。

$$P(F) = (9/10) \times (1/25) + (1/20) \times (24/25) = 21/250$$

$$P(D | F) = [(9/10) \times (1/25)] / (21/250) = 3/7$$

警告は「故障して警告」と「故障せずに警告」の重ならない二つに分けられます。故障品が全体の4%であることと、故障なしにも警告が出ることを、両方反映した式です。

両側Z検定の計算と解釈

問題4～6の解答例です。観測された差と、差を標準誤差で割ったzを区別します。

ケース	標準誤差	z	両側p値	5%水準の判断
A	2	1	0.3173	H0を棄却できない
B	1	2	0.0455	H0を棄却する
C	0.1	2	0.0455	H0を棄却する

問題4 Aは $z=1$ 、 $p\approx 0.3173$

$$\text{標準誤差} = 10/\sqrt{25} = 2 \quad z = (102-100)/2 = 1$$

$$p \approx 2 \times 0.158655 = 0.317310 > 0.05$$

H0を棄却するだけの根拠が得られなかったという判断です。 $\mu=100$ が証明されたわけではなく、pを「H0が正しい確率が約31.73%」とも解釈しません。

問題5 Bは同じ差2でも標準誤差が1になる

$$\text{標準誤差} = 10/\sqrt{100} = 1 \quad z = (102-100)/1 = 2$$

$$p \approx 2 \times 0.022750 = 0.045500 < 0.05$$

AとBの標本平均はいずれも102です。nが25から100へ4倍になる比較では、標準誤差が2から1へ半分になり、zは2倍になります。これは結果が出るまで標本を追加してよいという意味ではありません。

問題6 Cは同じp値でも差が10分の1

$$\text{標準誤差} = 10/\sqrt{10,000} = 0.1 \quad z = (100.2-100)/0.1 = 2$$

両側p値はBと同じ約0.0455で、H0を棄却します。一方、標本平均と100との差はBが2、Cが0.2。差と標準誤差がともに10分の1なので、zとp値が一致しています。

判断の限界と次の復習

解答を見た後は、計算の正誤に加えて、条件と結論の書き方を点検してください。

p値から言えることと言えないこと

p値は、帰無仮説と指定した標本モデルのもとで、今回以上に絶対値の大きい検定統計量が得られる確率です。仮説が正しい確率や、結果が偶然だけで生じた確率ではありません。

Cの観測された差は0.2です。実用上重要かどうかには、測定尺度や重要とみなす差の基準が必要で、この表だけでは判断できません。p値から因果関係も決められません。別の問題では、正規性・独立性・母標準偏差が既知かを確認します。標本標準偏差 $s=10$ という条件には、このZ検定をそのまま当てはめません。

自己点検

- ☐ 条件の右側を読み、分母と独立性の根拠を書いた
- ☐ 戻さない抽出では、残る全体数と故障品数を1ずつ減らした
- ☐ 母標準偏差と標準誤差を区別し、両側p値を求めた
- ☐ 棄却できないことを証明にせず、差の大きさと重要性を分けた

次に直すこと・解き直す日

公開資料と教材の位置づけ

1 MIT OpenCourseWare 18.05 Reading 3 (2022)

条件付き確率・独立・全確率・ベイズの定理。

2 MIT OpenCourseWare 18.05 All Statistics Reading (2022)

Z検定の仮定と両側p値はPDF 102～103ページ。

3 American Statistical Association p値に関する声明発表 (2016)

p値と、仮説の真偽・差の大きさ・重要性の区別。

本文の各資料名をクリックすると一次資料が開きます。Web解説の参考資料は2026年10月3日確認。設問・数値・解説は院試クラウド独自作成で、公開講義の問題を転載したものではありません。大学の出題基準を示す資料ではありません。

